# EUCLIDES

*MAANDBLAD*
*VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN*

*ORGAAN VAN*
*DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL*

**MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN**
**IN BINNEN- EN BUITENLAND**

36e JAARGANG 1960/1961
VIII - 1 MEI 1961

INHOUD



**P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN**

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.



De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

*Boeken ter bespreking* en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

*Artikelen ter opname* aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

*Opgaven voor de „kalender"* in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk Jan Huitzingstraat 43 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

# NIEUWE OPGAVEN

(Deel 21 nrs. 81—120).

*De oplossingen der vraagstukken* 81—120 *kunnen tot* 1 *februari* 1962 *worden gezonden aan de redacteur* **Prof. N. G. de Bruijn, Technische Hogeschool, Insulindelaan 2, Eindhoven.** *Publikatie der daartoe geschikte oplossingen zal plaats vinden in „Wiskundige Opgaven met de Oplossingen"*, **21** (3) 1962.

*Beknoptheid der oplossingen wordt ten zeerste op prijs gesteld. Het is niet nodig de oplossing te geven in de taal waarin de opgave is gesteld.*

*Men beschrijve het papier slechts aan één kant.*

*Nieuwe opgaven (met oplossingen) zijn steeds welkom.*

No. 81. In boeken over electromagnetisme komt dikwijls de bewering voor dat in een divergentievrij veld de veldlijnen gesloten krommen zijn.

Geef een voorbeeld van een (overal van nul verschillend) divergentievrij veld, waarin veldlijnen voorkomen, die een bepaald begrensd gebied niet verlaten, maar die toch niet gesloten zijn.

(*P. J. van Albada*).

No. 82. Zij $L$ het lichaam van de reëele getallen, $Q$ het lichaam van de gewone quaternionen, $R$ de ring van 2 bij 2 matrices met elementen uit $Q$.

Gevraagd de deelverzameling van $R$ te bepalen waarvan voor ieder element $A$ een quadratische vergelijking $A^2 = \lambda A + \mu I$ bestaat met $\lambda, \mu \in L$.

(*P. J. van Albada*).

No. 83. Als $\varphi$ een hoek is waarvoor $\sin 3\varphi + 1 \neq 0$ dan is er een driehoek $ABC$ waarvoor geldt

$$a : b : c = \{2 + \sin \varphi\} : \{2 + \sin (\varphi + \tfrac{2}{3}\pi)\} : \{2 + \sin (\varphi + \tfrac{4}{3}\pi)\}.$$

Bewijs dat in zo'n driehoek de ingeschreven cirkel door het zwaartepunt gaat.

(*O. Bottema*).

No. 84. Welke betrekking moet er tussen de zijden van een koordenvierhoek bestaan opdat van de omgeschreven ellipsen de cirkel de kleinste oppervlakte heeft?

(*O. Bottema*).

No. 85. $O$ is een vast punt van een vlak $V$. In $V$ beweegt zich een stoffelijk punt $P$ met massa $m$ onder invloed van een langs $OP$ gerichte aantrekkende kracht groot $mkr$ ($OP = r$, $k$ constant).

$V$ wentelt met constante hoeksnelheid $\omega$ om een vaste as $l$, die door $O$ gaat en met $V$ de constante hoek $\alpha$ maakt. Wanneer is $O$ een stabiele evenwichtsstand?

(*O. Bottema*).

No. 86. Hoe moeten op een cubische ruimtekromme twee punten $B_1$ en $B_2$ ten opzichte van drie gegeven punten $A_1$, $A_2$, $A_3$ gelegen zijn opdat de koorde $B_1B_2$ en de raaklijnen in $A_i$ twee reële transversalen hebben?

(*O. Bottema*).

No. 87. Een vlak $V'$ kan zich ten opzichte van een er mee samenvallend vast vlak $V$ bewegen. Men beschouwt een bepaalde stand van $V'$ en in die stand al die snelheidstoestanden van $V'$ waarbij het uiteinde van de snelheidsvector van een gegeven punt $A_1$ van $V'$ op een gegeven rechte $l_1$ ligt en het uiteinde van de snelheidsvector van een gegeven punt $A_2$ van $V'$ op een niet met $l_1$ evenwijdige rechte $l_2$. Bewijs dat voor elk punt $A$ van $V'$ de meetkundige plaats van het uiteinde der snelheidsvector een rechte $l$ is en onderzoek de verwantschap tussen $A$ en $l$.

(*O. Bottema*).

No. 88. Onder een Ceva-tripel verstaan wij drie punten $P_1$, $P_2$, $P_3$ resp. op de zijden $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ van een driehoek $A_1A_2A_3$ gelegen, zodanig dat $A_iP_i$ door één punt gaan. Bepaal de verzameling kegelsneden die de zijden van $A_1A_2A_3$ in twee Ceva-tripels snijden.

(*O. Bottema*).

No. 89. Voor welke viertallen van reële, elkaar onderling kruisende rechten bestaan er reële involutorische collineaties der ruimte die de vier rechten volgens de „Vierergruppe" permuteren?

(*O. Bottema*).

No. 90. Bepaal, met behulp der elliptische functies van Jacobi, een parametervoorstelling voor de doorsnede van een torus met een vlak door zijn middelpunt.

(*O. Bottema*).

No. 91. In driehoek $A_1A_2A_3$ is $A_i'$ de projectie van $A_i$ op de overstaande zijde, $S_i$ het snijpunt van $A_iA_i'$ met de niet door $A_i'$ gaande zijde van de voetpuntsdriehoek, $k_i = A_iS_i/A_iA_i'$ $(i = 1, 2, 3)$. Onderzoek of er driehoeken bestaan waarvoor $k_1$, $k_2$ en $k_3$ zich verhouden als de gegeven positieve getallen $p_1$, $p_2$ en $p_3$.

(*O. Bottema*).

No. 92. Men beschouwt een natuurlijk getal $N$, dat geschreven in het $g$-tallig stelsel (waarbij $g$ priem is) uit minstens $r$ cijfers bestaat en leidt daaruit een getal $N'$ af door het blok der laatste $r$ cijfers vooraan te plaatsen. (Voorbeeld met $g = 5$, $r = 3$: $N = 2412031$, dan $N' = 312412$). Bepaal (bij vaste $g$ en $r$) de waardenvoorraad der getallen $N'/N$.

(*O. Bottema*).

No. 93. $L_n(x)$ is het polynoom van Laguerre van de $n^{de}$ graad. Bewijs:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[L_n\left(\frac{x}{n}\right) - L_{n-1}\left(\frac{x}{n}\right)\right] = -\sqrt{x}\, J_1(2\sqrt{x})$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[L_n\left(\frac{x}{n}\right) - L_{n-1}\left(\frac{x}{n-1}\right)\right] = \frac{x}{2}\, J_2(2\sqrt{x}).$$

(*O. Bottema*).

No. 94. Een volkomen buigzame homogene ketting $AB$, met lengte $l$, in $A$ bevestigd, kan in een verticaal vlak kleine transversale trillingen uitvoeren onder invloed van de zwaartekracht (versnelling $g$). De ophanging in $A$ is elastisch, zodat dit punt kleine horizontale uitwijkingen kan verkrijgen. De frequenties van het stelsel zijn, in toenemende grootte $\omega_1$, $\omega_2$, .... Bepaal de exacte grenzen voor $\omega_i$.

(*O. Bottema*).

No. 95. $A_1$ en $A_2$ zijn twee punten van een in zichzelf bewegend vlak; de afstand $A_1A_2$ is $l$. De projectie op $A_1A_2$ van de versnelling van $A_1$ is $a_{12}$, de projectie op $A_2A_1$ van de versnelling van $A_2$ is $a_{21}$; bewijs dat op elk ogenblik $(a_{12} + a_{21})/l$ voor alle puntenparen $(A_1, A_2)$ dezelfde waarde heeft.

(*O. Bottema*).

No. 96. Let $r \geq 0$, $\rho \geq 0$, and

$$F(r, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{x^2+y^2 \leq \rho^2} [r^2 - 2rx + x^2 + y^2 + 1]^{-\frac{3}{2}}\, dx\, dy.$$

If $E$ and $K$ are the usual complete elliptic integrals of modulus $k = \rho(1 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}}$, prove that

$$\int_0^\infty [F(r, \rho)]^2\, r\, dr = 2\pi^2\rho^2 + (8\pi/\rho^2)[E(k) - K(k)].$$

(*C. J. Bouwkamp*).

No. 97. Te bewijzen

$$\int_0^\infty (x - [x + \tfrac{1}{2}])(-1)^{[2x]} J_0(x)\, dx = \tfrac{1}{4}.$$

(*H. Bremekamp*).

No. 98. Men vraagt de oplossingen der differentiaalvergelijking

$$\operatorname{tg}^2 y \cdot y'^4 - 2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) \operatorname{tg} y \cdot \left(\frac{\sin 2y}{\sin 2x} + y'\right)^2 y'^2 + {}$$
$$+ (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)^2 \left(\frac{\sin 2y}{\sin 2x} + y'\right)^4 = 0,$$

waarbij $y = \frac{1}{4}\pi$ voor $x = \frac{1}{4}\pi$.

(*H. Bremekamp*).

No. 99. Men vraagt de oplossing van de vergelijking

$$q(1 + q)r - (1 + p + q + 2pq)s + p(1 + p)t = 0,$$

waarbij voor $x = 0$, $z = \dfrac{a - y}{2}$, $p = \dfrac{a}{y} - \dfrac{1}{2}$.

(*H. Bremekamp*).

No. 100. Te bewijzen dat men de constanten $A$, $B$ en $C$ zo kan bepalen, dat voor $x > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{2}xz}\left\{Ae^{\frac{3}{2}xz} + B\cos\left(\tfrac{1}{2}xz\sqrt{3}\right) + C\sin\left(\tfrac{1}{2}xz\sqrt{3}\right)\right\}dz =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}\left(z^3+\frac{x^3}{z^3}\right)}\,dz.$$

Voer deze bepaling uit.

(*H. Bremekamp*).

No. 101. Bereken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} \sin nx_1 \sin nx_2 \sin nx_3 \sin nx_4.$$

(*H. Bremekamp*).

No. 102. Te bewijzen

$$1 + \frac{z}{2^p}\cos\varphi + \frac{z^2}{3^p}\cos 2\varphi + \frac{z^3}{4^p}\cos 3\varphi + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{p-1} \frac{1 - tz\cos\varphi}{1 - 2tz\cos\varphi + t^2z^2}\,dt,$$

en

$$\frac{z}{2^p}\sin\varphi + \frac{z^2}{3^p}\sin 2\varphi + \frac{z^3}{4^p}\sin 3\varphi + \ldots =$$

$$= \frac{z\sin\varphi}{\Gamma(p)}\int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{p-1} \frac{t}{1 - 2tz\cos\varphi + t^2z^2}\,dt,$$

voor $p > 0$, $|z| < 1$, $\varphi$ reëel.

(*H. Bremekamp*).

No. 103. Bereken

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1 - J_0(nat)}{n^2}.$$

(*H. Bremekamp*).

No. 104. Bewijs, dat de reeks, waarvan de $n$-de term is

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n(\log(n+1))^\alpha}\left\{\frac{1}{(\log 2)^\beta} + \frac{1}{(\log 3)^\beta} + \ldots + \frac{1}{(\log(n+1))^\beta}\right\},$$

voor $\alpha$ en $\beta$ reëel, $\alpha + \beta > 0$, convergeert.

(*H. Bremekamp*).

No. 105. Gegeven $2n$ punten op een cirkelomtrek. Men wil deze paarsgewijs door koorden verbinden zódanig dat deze $n$ koorden elkaar binnen de cirkel niet snijden. Op hoeveel manieren kan dat?

(*N. G. de Bruijn*).

No. 106. Let $a < b$, and let $f$ be a real function in the interval $a \leq x \leq b$. We assume that

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} f(x-\delta) \leq f(x) \qquad (a < x \leq b),$$

$$0 \leq \limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} \leq \infty \qquad (a \leq x < b).$$

Show that $f(a) \leq f(b)$.

(*N. G. de Bruijn*).

No. 107. Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be a sequence of positive numbers, with $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Let $S$ be the set of all positive integers $n$ with the property

$$\Pi_{p \mid n}\, p > n a_n$$

($p$ runs through the primes dividing $n$). Let $\sigma(x)$ be the number of elements of $S$ which do not exceed $x$. Show that $\sigma(x)/x \to 1$ if $x \to \infty$.

(*N. G. de Bruijn*).

No. 108. Toon aan, dat

$$1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \frac{1}{(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}.$$

(*P. J. de Doelder*).

No. 109. Bewijs, dat voor $0 \leq R < 1$ geldt:

$$\int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho\cos\varphi}{(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\, d\varphi = 4[K(R)-E(R)],$$

waarbij $K(R)$ en $E(R)$ de elliptische integralen der 1$^{e}$ resp. 2$^{e}$ soort zijn.

(*P. J. de Doelder*).

No. 110. Let the weakly multiplicative functions $a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ satisfy $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i(n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, and no

such relation for less than $k$ of the functions. Show that there is a number $Q$ such that for $(n, Q) = 1$ we have

$$a_1(n) = a_2(n) = \dots = a_k(n).$$

(*J. H. van Lint*).

No. 111. Prove that the equation $(x + pk)^p - x^p = y^n$, where $p$ is an odd prime number, $k$ and $n$ are integers, $n > p$, and $k$ is not divisible by $p$, has no solutions in integers $x$, $y$.

(*A. Mąkowski*).

No. 112. Is there a real sequence $a(n) \geq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(kn) = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots?$$

(*B. C. Rennie*).

No. 113. Gegeven de driehoek $ABC$. Men beschrijft *om* driehoek $ABC$ een kegelsnede $\gamma_1$, die toegevoegd is (in de zin van vraagstuk 119, deel 20, 1957) aan een bepaald punt $L$. Men beschrijft daarna *in* deze driehoek een kegelsnede $\gamma_2$, die aan hetzelfde punt $L$ is toegevoegd (in de zin van vraagstuk 120, deel 20, 1957).

Als $M_1$ en $M_2$ de middelpunten zijn van de twee kegelsneden $\gamma_1$ en $\gamma_2$, bewijs dan dat de drie punten $L$, $M_1$ en $M_2$ collineair zijn.

(*J. H. Tummers*).

No. 114. Men beschrijft om driehoek $ABC$ twee kegelsneden, toegevoegd aan twee willekeurige punten $L_1$ en $L_2$. Bewijs, dat het vierde snijpunt $D$ van de twee kegelsneden de trilineaire pool is van $L_1L_2$.

We beschouwen verder het geval, dat $L_1$ en $L_2$ isogonaal toegevoegde punten zijn t.o.v. driehoek $ABC$. Veranderen de twee kegelsneden zo, dat de lijn $L_1L_2$ om een vast punt $P$ draait, dan zal het vierde snijpunt $D$ een kegelsnede doorlopen, beschreven om driehoek $ABC$, welke kegelsnede toegevoegd is aan het punt $P$. (Met „toevoeging" is hier steeds bedoeld de toevoeging van vraagstuk 119, deel 20, 1957).

(*J. H. Tummers*).

No. 115. De lijnen $AL$, $BL$, $CL$ snijden de overstaande zijden van driehoek $ABC$ in $A_0B_0C_0$. Zij $P$ een willekeurig punt in het vlak van driehoek $ABC$. Als de lijnen $PA$, $PB$, $PC$ de overstaande zijden $BC$, $CA$, $AB$ snijden in $A_1$, $B_1$, $C_1$, en de lijnen $A_1L$, $B_1L$, $C_1L$, de zijden $B_0C_0$, $C_0A_0$, $A_0B_0$ van driehoek $A_0B_0C_0$ snijden in $A_2B_2C_2$, dan zullen de lijnen $A_0A_2$, $B_0B_2$, $C_0C_2$ door één punt $Q$ gaan. De lijn $PQ$ zal door $L$ gaan. Een omkegelsnede van driehoek $ABC$ wordt omgezet in een omkegelsnede van driehoek $A_0B_0C_0$. Bewijs dit. Bewijs ook, dat als men voor punt $L$ het zwaartepunt $Z$ neemt van driehoek $ABC$, de transformatie $P \rightarrow Q$ equivalent is met een vermenigvuldiging met centrum $Z$. Doorloopt $P$ de omcirkel, dan doorloopt $Q$ de negenpuntscirkel.

(*J. H. Tummers*).

No. 116. Men beschouwt een parabool $\pi$ met richtlijn $l$, en een willekeurig punt $P$ op $l$. De cirkel, die gaat door de projecties van $P$ op de zijden van een pooldriehoek ten opzichte van de parabool, gaat ook door het brandpunt van de parabool. Bewijs dit.

(*J. H. Tummers*).

No. 117. Bewijs dat de meetkundige plaats van de punten $L$ met de eigenschap, dat de trilineaire poollijn van $L$ ten opzichte van een gegeven driehoek $ABC$ loodrecht staat op de trilineaire poollijn van het isogonaal aan $L$ toegevoegde punt $L'$, een derdegraadskromme is, gaande door $A$, $B$ en $C$, die invariant is voor isogonale inversie. De raaklijnen in $A$, $B$ en $C$ aan deze kromme snijden de overstaande zijden in drie punten gelegen op de orthische as van driehoek $ABC$ (d.i. de trilineaire poollijn van het hoogtepunt van driehoek $ABC$).

(*J. H. Tummers*).

No. 118. Let $A$ be a positive definite hermitean matrix. Replacing all elements in $A$ on and below the main diagonal by zeros, we obtain the matrix $B$. Prove that all eigenvalues $\lambda$ of $(A - B)^{-1}B$ satisfy $|\lambda| < 1$.

(*G. W. Veltkamp*).

No. 119. If $\gamma$ denotes Euler's constant, show that

$$\int_0^1 \frac{\tanh x}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{1-\tanh x}{x}\,dx = \gamma + \log\frac{4}{\pi}.$$

(*G. W. Veltkamp*).

No. 120. Let $c$ be a positive constant, and let $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ denote the positive zeros of $\cos x - cx \sin x$. Show that

$$\gamma_0 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n\pi}\right) = c^{-\frac{1}{2}}.$$

(*G. W. Veltkamp*).

# WELKE GEVOLGEN VOOR HET V.H. EN M.O. BRENGT DE MODERNE ONTWIKKELING DER WISKUNDIGE WETENSCHAPPEN MET ZICH MEDE? *)

door

Prof. Dr. N. H. KUIPER

Wageningen

*Inhoud*



*) Voordracht Vakantiecursus, Mathematisch Centrum 1960.

5. Stereometrie.
6. Goniometrie.
7. Algebra.
   7.1. Getallen en symbolen voor getallen.
   7.2. De invoering van het negatieve getal en het begrip groep.
   7.3. Het symbool $x$ naar het lager Onderwijs.
   7.4. Logaritmen.
   7.5. De definitie van een functie.
   7.6. De grafiek van een functie.
   7.7. Limieten.
   7.8. Integraalrekening.

*Deel I. Theorie.*

1. *De wiskundige wetenschappen.*

De vereniging van wiskundigen in de Verenigde Staten van Amerika, the American Mathematical Society, geeft sinds 1940 met medewerking van vele andere verenigingen, en wiskundigen over de gehele aarde, een tijdschrift, Mathematical Reviews, uit. Hierin wordt aan wiskundige artikelen en boeken, die iets nieuws brengen, een korte bespreking gewijd. Het aantal besprekingen is thans ongeveer 7000 per jaar. Onder de huidige wiskundige wetenschappen, kort genaamd *de wiskunde,* versta ik datgene wat in deze 7000 artikelen per jaar is aangeroerd, behandeld en gevonden. De besprekingen in de Mathematical Reviews zijn systematisch gerangschikt, doch het is opmerkelijk dat het systeem van die schikking telkens verandert. Deze veranderingen weerspiegelen welk een levende, explosief zich ontwikkelende wetenschap, de wiskunde is. Dit jaar bestaat de indeling uit 55 wiskundevakken, die in 15 groepen samengevoegd zijn. Een ruwe aanduiding van deze 15 groepen is als volgt.

1. Logica, grondslagen en combinatorische problemen.
2. Algebra waaronder ook getaltheorie, algebraïsche meetkunde, lineaire algebra en homologische algebra.
3. Groepentheorie.
4. Reële en complexe functies, maat en integraal.
5. Differentiaalvergelijkingen.
6. Reeksen.
7. Integraalvergelijkingen. Operatorrekening.
8. Functionaalanalyse en variatierekening.
9. Meetkunde en convexe verzamelingen.
10. Topologie en differentiaalmeetkunde.

11. Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek.
12. Numerieke methoden, rekenmachines.
13. Mechanica, dynamica, leer der materie.
14. Relativiteitstheorie, astronomie.
15. Econometrie, speltheorie, biometrie, informatie- en communicatieleer, cybernetica of stuurleer.

2. *De ontwikkeling van een wetenschap.*

In de vorige vakantiecursus heb ik deze als volgt beschreven: De ontwikkeling van een wetenschap bestaat enerzijds in een vermeerdering van feiten of waarheden die ontdekt en/of begrepen zijn; anderzijds bestaat zij in een verbetering van begrippen en werktuigen, zodanig dat dezelfde hoeveelheid feiten en waarheden gemakkelijk overzien en begrepen kan worden. Kort gezegd is de ontwikkeling *het vermeerderen van inhoud en het vereenvoudigen van de vorm.*

De ontwikkeling van de wiskundige wetenschappen in elk van de vijftien genoemde groepen van vakken is als een explosie. Zij wordt gemarkeerd door de oplossing van vraagstukken welke lang vele gemoederen beziggehouden hebben. Ik wil twee voorbeelden van recente vondsten noemen.

In 1958 gelukte het aan Bose, Parker en Shrikhande, twee orthogonale Latijnse vierkanten tien bij tien te vinden. Twee orthogonale Latijnse vierkanten drie bij drie zijn:

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $c$ | $a$ |

en

| | | |
|---|---|---|
| $\gamma$ | $\beta$ | $\alpha$ |
| $\beta$ | $\alpha$ | $\gamma$ |
| $\alpha$ | $\gamma$ | $\beta$ |

; gecombineerd

| | | |
|---|---|---|
| $a\gamma$ | $b\beta$ | $c\alpha$ |
| $c\beta$ | $a\alpha$ | $b\gamma$ |
| $b\alpha$ | $c\gamma$ | $a\beta$ |

Dit vraagstuk stond sinds Euler open en de vermoedens helden over naar de onmogelijkheid, vooral omdat ook elektronische rekenmachines tot dan geen voorbeeld hadden gevonden. De vondst werd gedaan in verband met de combinatorische theorie betreffende constructies van proefschema's, vooral nuttig in de landbouw.

Om een tweede recente vondst uiteen te zetten beschouwen we in de euclidische ruimte een begrensd oppervlak zonder rand, dat bestaat uit gewone driehoeken zó, dat in elk hoekpunt een krans van driehoeken samenkomt. Neem bijvoorbeeld een tetraeder-oppervlak. Het is niet moeilijk om aan te tonen dat dit oppervlak kan worden gladgestreken bij de hoekpunten zowel als langs de zijden

van de driehoeken. Dit houdt in dat een bi-continue (d.i. topologische) afbeelding van het gegeven oppervlak op een tweede oppervlak bestaat, terwijl het tweede glad is, d.w.z. dat het lokaal door differentieerbare betrekkingen tussen de coördinaten kan worden beschreven. De vraag was of het analoge ook opgaat voor hogere dimensies. Men heeft dit kunnen bewijzen voor dimensies $n = 3$ en 4. Welnu, in 1960 heeft de Fransman Kervaire (steunend op werk onder meer van de grote Amerikaanse wiskundige John Milnor) bewezen, dat voor $n = 10$ het analoge niet geldt: Er bestaat een tiendimensionale trianguleerbare compacte variëteit, die niet topologisch op een differentiëerbare variëteit kan worden afgebeeld.

Wat zullen de gevolgen voor het V.H.M.O. van deze recente vondsten zijn? Ik geloof niet dat we ons daarover druk behoeven te maken. Deze vondsten zullen evenmin als vele andere enige invloed hebben op het V.H.M.O. van morgen.

Anders staat het met recente vondsten betreffende de toepassing van wiskunde. Op vele gebieden en in bijna alle wetenschappen worden thans betrekkelijk eenvoudige wiskundige technieken met succes toegepast. In het bijzonder noem ik de numerieke wiskunde, en verder de statistiek met de schattings- en toetsingstheorie, die eigenlijk pas in de laatste decennia een redelijk fundament heeft gekregen. Waarschijnlijk zal over enige jaren interessant onderwijs in statistiek ook bij het V.H.M.O. didactisch verantwoord mogelijk zijn. De wenselijkheid van enig onderricht in dit vak wordt algemeen erkend. Of dit onder de naam wiskunde en in de voor wiskunde uitgetrokken uren moet worden gegeven, dan wel apart, analoog aan het onderwijs in de mechanica, is een vraag, waarover men van mening kan verschillen. Wel vind ik dat thans elke wiskundeleraar zich moet oriënteren op het gebied van de statistiek.[1])

Aangezien Professor Duparc in deze vakantiecursus *de gevolgen van de toegenomen toepassing van de wiskunde in de maatschappij* behandelt, zal ik dit aspect *buiten beschouwing laten.* Dit betekent niet dat ik die gevolgen of hun gewenstheid ontken.

---

[1]) Zie bijv.: H. de Jonge, Medische Statistiek I, Instituut voor praeventieve geneeskunde, Leiden.

N. H. Kuiper, Wiskundige Verwerking van Waarnemingsuitkomsten. Collegedictaat, Uitgave Wageningse Hogeschoolvereniging, Studenteninlichtingendienst, Wageningen (met uitvoerige litteratuurlijst).

J. Hemelrijk, Cursus Elementaire Statistiek. Mathematisch Centrum, Amsterdam.

3. *Vereenvoudiging in de wiskunde.*

Naast de vermeerdering van inhoud heb ik als aspect van ontwikkeling de vereenvoudiging genoemd. *In de moderne wiskunde zijn een aantal gebruiken doorgedrongen, die de beoefening vergemakkelijken. Die gebruiken zijn uit nieuwe inzichten voortgesproten. Zij bestaan ook in het hanteren van nieuwe begrippen, waarvan men heeft ingezien dat zij een centrale positie innemen.* De vereenvoudigingen hebben in de laatste decennia een belangrijke bijdrage geleverd tot de ontwikkeling van de wiskunde doordat zij gemaakt hebben, dat vele eerst divergerende vakken thans profijt ondervinden door gemeenschappelijke aspecten. De diverse specialismen zijn dichter bij elkaar gekomen. De vijfenvijftig wiskundevakken, die ik in het begin van mijn voordracht vermeldde, hangen samen door gemeenschappelijke structurele elementen. Zij zijn niet 55 onafhankelijke wezens met een eigen bestaan, maar eerder 55 verschijningsvormen van één wezen: de wiskunde.

Het is dan ook duidelijk, dat de *komende veranderingen* in het V.H.M. Onderwijs in de wiskunde, voorzover ze niet hun oorzaak vinden in de nieuwe mogelijkheden om bepaalde wiskundige technieken in andere vakken toe te passen, vooral *verklaard zullen kunnen worden als gevolg van de bedoelde vereenvoudigingen, inzichten en gebruiken, die voor een deel zonder meer in het V.H.M.O kunnen worden overgenomen.*

4. *De vereenvoudigingen.*

*De grote schoonmaak. Het standpunt waarbij ten allen tijde elke bewering, elk woord, elke formule, elk symbool en elke deductie, die in een beschouwing voorkomt, kritisch wordt onderzocht, niet alleen op gewone fouten, maar ook op overbodige affecten, op niet ter zake doende associaties, is typisch voor de wiskundige van deze tijd.* Het gevolg van dit standpunt, dat sinds 1900 in wijde kring is opgekomen, is een grote reiniging geweest, en vele vereenvoudigingen in de wiskunde kan men daarmee verklaren. Voor zover mogelijk in dit licht, en tevens met het oog op de gevolgen in het V.H.M.O., zal ik nu een aantal typische kenmerken van de moderne wiskunde bespreken.

4.1. *De axiomatische methode.* De axiomatische methode houdt in dat het uitgangspunt bij een theorie van alle overbodigheden wordt gereinigd, en dat duidelijk wordt gesteld aan welke beweringen (axioma's) betreffende een systeem van objecten om te beginnen de waarheidswaarde „waar" zal worden gehecht. De

theorie bestaat dan uit logische gevolgtrekkingen van die beweringen. Het is in de mode (modern) om het reinigen zelf niet in publikaties te beschrijven; dat doet de wiskundige alleen thuis. Ik maak deze opmerking expres omdat dit verduisteren van de reinigingen juist leidt tot didactische moeilijkheden bij het meetkunde-onderwijs, zoals we zullen zien.

Door van het stel axioma's beurtelings axioma's weg te laten en bij te voegen, en de consequenties te bestuderen, kan men zien hoe de theorie van de keuze der axioma's afhangt. Aldus doende is gebleken dat sommige combinaties van axioma's veel voorkomen. Zo bijvoorbeeld die welke een *groep* karakteriseren.

4.2. *Groepentheorie.* Het begrip groep speelt evenals andere algebraïsche begrippen (zoals lichaam en ring) een belangrijke rol in alle onderdelen van de wiskunde. Het zou verkeerd zijn hieruit te concluderen dat nu de groepentheorie bij het V.H.M.O. als vak moet worden ingevoerd. Elke leraar moet iets van groepentheorie weten [2]), in elk geval zoveel dat hij met een gerust geweten een aantal groepen in zijn onderwijs kan „aanwijzen" aan de leerlingen. Zo bijvoorbeeld:

a) de optelgroep der reële getallen.
b) de groep der verplaatsingen op een rechte.
c) de vermenigvuldiggroep der positieve getallen.
d) de groep der meetkundige vermenigvuldigingen vanuit een vast punt in het vlak (of de ruimte) met factor $> 0$.

N.B. a), b), c) en d) zijn isomorf. Omdat a) en c) isomorf zijn bestaan de logaritmen! [3])

e) de groep bestaande uit de identiteit en de spiegeling t.o.v. een lijn of punt.
f) de groep der rotaties om een punt in het vlak.
g) de draaigroep van een regelmatige driehoek.
h) de translatiegroep (vlak).
i) de bewegingsgroep (vlak).

Groepen van transformatie kunnen met het begrip symmetrie [2]) [4]) in verbinding gebracht worden. Het is verheugend dat in een enkel schoolleerboek der vlakke meetkunde het woord groep reeds wordt aangetroffen. Bijv. in [5]).

[2]) A. Speiser, Gruppentheorie, Springer. F. Loonstra, Algebra, Noordhoff (1959).

[3]) Zie A. F. Monna, Euclides 28, p. 142—155 (1952) en 30, p. 88—96 (1954).

[4]) Van Hiele-Geldof, Wiskunde voor M.M.S.

[5]) Van Dop-Van Haselen, Nieuwe vlakke meetkunde III.

4.3. *De leer der verzamelingen.* De objecten waarover de axiomatische beweringen worden gemaakt hebben geen andere eigenschappen dan die welke voortvloeien uit de axioma's. In bepaalde gevallen moeten objecten die de wiskundige al kende, van overbodige intuïtieve eigenschappen ontdaan worden, om de gewenste objecten te krijgen. Veelal begint een theorie of een publikatie met het noemen van een verzameling („kale") objecten, waar eerst niets bijzonders bij gedacht mag worden. In moderne stijl begint men bijvoorbeeld met: „Zij V een verzameling; zij $x$ een element van $V$".

Het begrip verzameling zal het V.H.M.O. binnentrekken. Dit betekent niet, dat de leer der verzamelingen in het V.H.M.O. behandeld zal worden. Het betekent slechts dat het woord en het begrip verzameling gebruikt zullen worden, en tevens dat een aantal symbolen zal worden ingevoerd. Het zijn de volgende:

| | |
|---|---|
| $x \in V$ | $x$ is een element van $V$ |
| $W \subset V$ | $W$ is een deelverzameling van $V$, of met andere woorden: $W$ is bevat in $V$ |
| $W \cap V$ | de doorsnee van $V$ en $W$ |
| $W \cup V$ | de vereniging van $V$ en $W$ |
| $\{x \mid 4 < x < 7\}$ | de verzameling van alle $x$ waarvoor geldt $4<x<7$ (de voorwaarde staat steeds achter de verticale streep) |
| $\emptyset$ | de lege verzameling [6]). |

4.4. *Formele logica.* De algemene schoonmaak in het begin van deze eeuw heeft zich ook gericht op *het concluderen.* Het trekken van gevolg moet logisch zijn. Wat is logisch? Met betrekking tot deze vraag is de toestand aanzienlijk verhelderd door de *formele logica.* Een formele logica kan tot op zekere hoogte worden opgevat als een systeem van automaten waar men beweringen in kan doen, en die andere beweringen op kunnen leveren met vermelding van waarheidswaarden (waar of niet-waar) voor geval de gesubstitueerde beweringen gegeven waarheidswaarden hebben.

Het maken van logische gevolgtrekkingen kan dus worden geautomatiseerd, en een gevolgtrekking zal alleen dan logisch heten, indien hij door de beschikbare automaten, die samen een gebruik-

[6]) Tijdens de discussie kwam de vrees naar voren dat het begrip lege verzameling en het symbool $\emptyset$ te moeilijk zouden zijn voor de leerlingen. Het begrip valt te vergelijken met het getal nul met symbool ervoor, dat historisch gezien zeer laat is ontdekt. Ik acht $\emptyset$ niet moeilijker dan 0.

te formele logica vormen, kan worden bevestigd. Sommigen zijn van mening dat vele symbolen van de formele logica in het schoolonderwijs moeten worden opgenomen. Ik weet niet of het praktisch belang voldoende groot is, maar beveel aan dat leraren, in het bijzonder degenen die het initiatief van het schrijven van leerboeken opbrengen, dit eens onderzoeken. De symbolen $\Rightarrow$ voor *implicatie*, en $\Leftrightarrow$ voor *equivalentie van beweringen* komen in elk geval wel direct in aanmerking voor gebruik. De symbolen $\forall$ voor „voor alle" en $\exists$ voor „er bestaat", kunnen ook nuttig zijn.

4.5. *Het voorstellen door eenvoudige symbolen.* Zo gauw een object, een punt, een driehoek, een rij van drie getallen, een relatie, een functie, een bewering, of wat dan ook, in een beschouwing vele malen voorkomt, zal de wiskundige de voorstelling van het object vereenvoudigen. In plaats van vijf keer te spreken over het parallellogram ABCD zal hij dus eerst zeggen: Laat $p$ „het parallellogram ABCD" zijn. Daarna zal hij de naam „$p$" gaan gebruiken. In de schoolwiskunde kan dit principe veel meer worden toegepast dan gebruikelijk is.

4.6. *Afbeeldingen en functies.* Naast verzamelingen spelen de afbeeldingen, bijvoorbeeld de functies, een belangrijke rol in de wiskunde. Dat een functie niet alleen getallen op getallen afbeeldt, doch ook verzamelingen getallen (bijv. interval) op verzamelingen moet aan leerlingen duidelijk worden gemaakt. De bewegingen en sommige affiene transformaties (verrekking in een richting) zijn voorbeelden van afbeeldingen. *Dat functies voorbeelden van afbeeldingen zijn, en afbeeldingen voorbeelden van relaties* (grafiek) moet de leraar weten, en als het te pas komt moeten de leerlingen van die kennis profiteren.

Het is gewenst dat het begrip functie nog verdergaand in belang toeneemt in het schoolonderwijs. In het bijzonder zullen op vele plaatsen in dit onderwijs vergelijkingen plaats moeten inruimen voor functies. Dit geldt bijvoorbeeld in de analytische meetkunde [7]).

4.7. *Topologie en continuïteit.* Een fundamentele plaats wordt in de moderne wiskunde ingenomen door de topologie. In de schoolwiskunde ontmoet men dit onderwerp in de vorm van de limieten en het begrip continuïteit. De behandeling van deze onderwerpen

---

[7]) Voor het hoger onderwijs in de analytische meetkunde zie in dit verband: N. H. Kuiper, Analytische Meetkunde verklaard met lineaire algebra, Noord Hollandse Uitg. Mij. Amsterdam 1959.

moet gemoderniseerd worden en wel *dient de formulering van continuïteit en limiet zo gemaakt te worden, dat vrijwel dezelfde formulering later ook gebruikt kan worden voor andere afbeeldingen dan voor reële functies, bijvoorbeeld voor continuïteit betreffende complexe functies.* Dit kan door bij een functie ook te denken aan afbeeldingen van verzamelingen getallen, zoals boven reeds bepleit is. Voorts zal het begrip limiet van een functie verklaard moeten worden uit het meer fundamentele begrip continuïteit [8]) [9]) waardoor een uitdrukking als „op den duur komt het getal willekeurig dicht bij zijn limiet'' krachtdadig uit de wereld wordt geholpen.

4.8. *Vectoren.* Het belang van de vectoren werd in de vorige vakantiecursus uiteengezet. In het hoger onderwijs bestaat behoefte aan kennis van vectoren bij de wiskunde, de natuurkunde, de statistiek, de economie, de biologie, de landbouwwetenschappen. Het is dan ook zeker dat de vectoren een belangrijker rol in het V.H.M.O. zullen spelen.

Vele van de in dit eerste deel genoemde gevolgen leven thans als wensen in wijde kring. Ook in internationaal verband bestudeert men het probleem van een continu verloop van de wiskundige ontwikkeling van kinderen tot aan het hoge niveau dat velen tegenwoordig daarin te zijner tijd dienen te bereiken. Zo werd in november 1959 door de Organisatie van Europese Economische Samenwerking een congres over „New thinking in school mathematics'' georganiseerd, waarin sommige van de boven gegeven ideeën ook werden genoemd. Men zie vooral de suggesties van Professor Dieudonné [10]). In dit verband zal u ook interesseren dat onlangs in Brussel een aantal hoogleraren en leraren uit Zwitserland, Duitsland, België en Nederland een week samenkomen, teneinde leraren V.H. M.O. voor te lichten over nieuwe ontwikkelingen in de moderne wiskunde. Hieraan nemen drie Nederlandse hoogleraren en 20 Nederlandse leraren deel. Een overzicht van wiskunde, van encyclopaedische aard en speciaal geschreven voor leraren, is dat van Behnke e.a. [11]). Voorts kan ik U een nieuw didactisch boekje van Lu-

---

[8]) Lucienne Félix, Mathématiques modernes. Enseignement Elémentaire. Blanchard, Parijs (1960). In hoofdstuk VI worden limieten besproken. $\forall$ en $\exists$ worden hierbij gebruikt.

[9]) N. H. Kuiper, Differentiaal- en integraalrekening. 2e druk. H. Veenman en Zonen, Wageningen (1960) (bedoeld voor de propaedeuse aan de Landbouwhogeschool).

[10]) Euclides 35, p. 218—229 (1960).

[11]) Behnke e.a. Grundzüge der Mathematik. Band I Arithmetik und Algebra (1958), Band II Geometrie (1960).

cienne Félix [8]) zeer aanbevelen. Hierin vindt u veel terug, en nader uitgewerkt, van wat ik in deze voordracht naar voren wil brengen. Tenslotte noem ik in dit verband ook nog een iets moeilijker werkje van Bourbaki [12]), waarin U ook de moderne ontwikkeling in de wiskunde belicht vindt.

## *Deel II. Praktijk.*

### 1. *De vlakke meetkunde als wiskunde en als natuurwetenschap.*

Het onderwijs in de vlakke meetkunde, in het bijzonder het begin daarvan, heeft een stroom van kritiek uitgelokt, welke stroom ook door de vakantiecursus 1960 gaat. Het onderwijs in meetkunde is zeer belangrijk. Tijdens mijn werkzaamheid als leraar bij het M.O. heb ik vooral de volgende aspecten leren waarderen. a) De leerling leert bij dit vak het onderscheid tussen „het gegeven" en het „te bewijzen"; hij *oefent in het maken van logische gevolgtrekkingen*; b) Hij raakt *vertrouwd in de ruimte en in het platte vlak*; c) *Zijn initiatief wordt geprikkeld en gestimuleerd* door de talloze niet te diep liggende, doch soms zeer verrassende eigenschappen; d) *De leerling geniet.* (De betere leerlingen genieten meer dan de slechtere; N.B. het genieten is een wezenlijk aspect van een stuk cultuur dat leeft.)

Wat is vlakke meetkunde? Algemeen wordt gedacht dat vlakke meetkunde een onderdeel van de wiskunde is. Dit is echter slechts één aspect van het schoolvak vlakke meetkunde. Schoolmeetkunde moet immers in hoge mate gerekend worden tot de wetenschappen betreffende onze indrukken van buiten, dus tot de natuurwetenschappen. Deze twee aspecten nu worden te weinig onderscheiden.

Zo vindt men in de leerboeken de volgende reeks beweringen: Een rechte lijn is de scherpe kant van een lineaal. Door twee punten gaat één rechte. Immers als men twee keer een rechte tekent door twee punten, krijgt men twee keer dezelfde rechte. Microscopische analyse en kennis van de moleculaire structuur van de lineaal bevestigt dit echter niet!

Voorts las ik: Indien twee lijnen gesneden door en derde gelijke overeenkomstige hoeken hebben, dan vindt men nooit een snijpunt van die twee lijnen, hoe ver die ook verlengd worden. De reden heet, dat bij translatie geen punt op zijn plaats blijft.

Wat hapert er nu aan deze beweringen? Het zijn beweringen van wiskundige aard, die gemaakt worden alsof het echt ware bewerin-

[12]) N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris (1960).

gen zijn, dat wil zeggen toepasbaar op de ruimte waarin we zijn, en met elke graad van nauwkeurigheid. Dat kan echter niemand experimenteel vaststellen als het wel waar zou zijn, want niemand meet met *elke* graad van nauwkeurigheid. Trouwens met-*elke-graad*-van-nauwkeurigheid-meten is principiëel onzin volgens de moderne natuurkunde. Experimenteel zou hoogstens het tegendeel vastgesteld kunnen worden, namelijk dat de genoemde beweringen bij een zekere graad van nauwkeurigheid van meten *fout* zijn. Binnen het kader van de algemene relativiteitstheorie is men inderdaad tot deze conclusie gekomen. Dientengevolge geldt: *Niet voor de beschrijving van alle verschijnselen in de natuur geeft de euclidische ruimtemeetkunde een voldoende goed benaderende beschrijving van de ruimte.*

Twee vragen dringen direct naar voren: Moeten leraren relativiteitstheorie beheersen? Moeten deze onaangename feiten aan leerlingen verteld worden? Op beide vragen is het antwoord: neen. Maar wel moet de wiskundeleraar weten, dat zijn *meetkunde-onderwijs begint als onderwijs betreffende de indrukken van buiten, betreffende ons milieu, betreffende de natuur. De volgende twee zinnen moet de leraar daarom steeds bij zich dragen,* ook al zal hij die zinnen niet voortdurend uitspreken. Dit geldt vooral voor schrijvers van boeken:

I. *Als je het tekent, komt het aardig goed uit.*

II. *Voor de ideale ruimte die we bij onze ruimte verzonnen hebben, komt het precies uit. M.a.w. de bewering heeft de waarheidswaarde „waar" in de theorie die we behandelen, want deze volgt logisch uit de vooronderstellingen over de ideale ruimte.*

Deze twee zinnen kunnen een willekeurige stelling in de meetkunde betreffen zoals: de zwaartelijnen in een driehoek gaan door een punt. Zij gelden ook voor de axioma's. In de natuurwetenschap spreekt men van hypothese in plaats van axioma. Men heeft het schema

| | | |
|---|---|---|
| meetkunde (als natuurkunde) | hypothese | wet |
| meetkunde (als wiskunde) | axioma | stelling |

Niemand heeft nog ooit twee lijnen onbeperkt verlengd. Niemand weet dus dat twee evenwijdige lijnen in een vlak in de natuur wel bestaan. Voorzover we het gedaan hebben, *was het experiment in de huiskamer niet in strijd met het parallellenaxioma. Voor het ideale vlak poneren we het parallellenaxioma.*

Niemand heeft nog ooit onze hele ruimte een translatie laten uitvoeren. Voor een klein stukje ruimte of oppervlak kan men het doen.

Of er bij voortzetting van de translatie tot verderaf gelegen punten, bijvoorbeeld op $10^{10}$ km, niet steeds een vast punt gevonden zal worden, hetgeen dus zou betekenen dat translaties van de hele ruimte niet bestaan, kan niet experimenteel worden vastgesteld. *Of translaties van onze hele ruimte bestaan kan niet worden vastgesteld. Als je het tekent komt het aardig goed uit. Voor de ideale ruimte die we bij onze ruimte verzonnen hebben, heeft de bewering de waarheidswaarde „waar"*, dank zij andere vooronderstellingen of dank zij het feit dat we deze juist als uitgangspunt [13]) kiezen [14]).

Niemand heeft nog onze hele ruimte met een euclidisch stelsel van drie coördinaten éénéénduidig kunnen bedekken. Voor een klein stukje ruimte komt het aardig goed uit, ook wat betreft afstanden gegeven door de gebruikelijke formules uit de analytische meetkunde. Volgens de relativiteitstheorie bestaat voor onze gehele ruimte geen euclidisch coördinatenstelsel. Voor de ideale ruimte bestaat het wel, dank zij de gebruikelijke axioma's van Euclides, of dank zij het feit dat we dit (de analytische meetkunde) juist als een der uitgangspunten kiezen.

2. *Verschillende uitgangspunten voor de meetkunde.*

Voor het onderwijs in de meetkunde zijn verschillende uitgangspunten denkbaar. Ik doel hier op het logische uitgangspunt en *niet* op het didactische dus niet op de gang van zaken in de eerste meetkundeles. Didactische overwegingen leiden ertoe de eerste lessen te beginnen met een gewenning aan enige soorten figuren en delen van figuren, translaties enz., met hun namen [15]).

Enige logische uitgangspunten zijn:

a) De methode van *Euclides*, bekend, doch niet meer door allen bemind.

b) De *translaties, spiegelingen en bewegingen* van het platte vlak (een verzameling punten) worden als grondbegrippen gekozen en dan worden, uitgaande van enige geschikt gekozen beweringen als axioma's, in korte tijd een groot aantal euclidische stellingen afgeleid, zodat de gewone draad weer kan worden opgevat. Deze methode verdient aanbeveling, omdat daarmee het begrip groep

---

[13]) Van Dop-Van Haselen, Nieuwe vlakke meetkunde I.

[14]) De meetkunde-als-natuurkunde is het complex van concrete associaties, in de zin van Professor Peremans (deze vakantiecursus) bij de meetkunde-als-wiskunde.

[15]) Zie: Van Hiele-Geldof, De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O. Diss. Utrecht 1957.

(van bewegingen) meer in het centrum van de belangstelling komt te staan, terwijl de gunstige aspecten van het meetkunde-onderwijs, die ik boven noemde, niet verloren gaan.

c) *Analytische meetkunde met vectoren.* Professor Dieudonné adviseert de vectoren met in-produkt, axiomatisch gegeven, als uitgangspunt te kiezen voor de meetkunde. Hij adviseert „wèg met Euclides", en wil slechts een beperkte hoeveelheid van de oude meetkunde behouden. Een motief tégen euclidische meetkunde is dat de stellingen van de vlakke meetkunde in een later stadium (derde klasse) op geen wijze van nut zijn voor, of leiden tot onderdelen van de wiskunde, waaraan thans op de frontlinie nog gewerkt wordt. Er is geen verbinding met thans in die zin levende wiskunde. Dit neemt de door mij eerder genoemde gunstige aspecten (voordelen) intussen niet weg. De vraag is of die gunstige aspecten op andere wijze tot hun recht zouden kunnen komen, indien we Professor Dieudonné volgen.

Het uitgangspunt van Professor Dieudonné is een volkomen nieuw uitgangspunt en daarom is men geneigd de verliezen die het meebrengt zwaar te wegen, vooral aangezien men de winst onvoldoende ziet. Men verliest veel van de gunstige aspecten die ik boven noemde. Het uitgangspunt (als natuurkunde (!)) aanvaardbaar maken aan eerste-klas-leerlingen schijnt voorlopig een moeilijke taak. Een voordeel is echter gelegen in een uiterst snel bereiken van alle stellingen die we willen kennen. Een ander voordeel is dat het uitgangspunt duidelijk is, en dat de scherpste leerlingen en de leraar duidelijk zien hoe de diverse beweringen logisch uit dit uitgangspunt volgen.

Het zou van belang zijn indien onderzocht werd, hoe men uitgaande van de vectoren abstract dan wel via euclidische coördinaten, langs de kortste weg zoveel euclidische stellingen kan vinden, dat de gewone draad van het meetkunde-onderwijs weer kan worden opgevat. Wat is de voor V.H.M.O.-leerlingen meest aanvaardbare manier om dit te doen, en hoe aanvaardbaar is deze?

3. *Verzamelingen en eenvoudige symbolen in de meetkunde.*

In een axiomatische opzet van vlakke meetkunde worden veelal punten en lijnen als niet nader gedefiniëerde grondbegrippen ingevoerd. De lijn is dus in het begin niet een verzameling punten. Zo gauw echter de meetkundige plaatsen aan de orde komen, dan kan de rechte lijn ineens wèl een verzameling van punten zijn, nl. bijvoorbeeld de verzameling van alle punten X even ver van P als van Q,

die de middelloodlijn van PQ *is*. Het verdient aanbeveling rechte lijnen zowel als andere figuren van den beginne af bewust als puntverzamelingen op te vatten. Dat hiermee het dualisme in de projectieve meetkunde moeilijker wordt, acht ik geen bezwaar. Dus: *Elke rechte lijn is een puntverzameling.*

Bij bestudering van een leerboek der vlakke meetkunde valt op dat, vooral bij de stellingen in het „gegeven" en het „te bewijzen", veel beweringen uitsluitend in formule worden uitgedrukt. Zo bijvoorbeeld: $\angle \alpha = \angle \beta$; $AB > AC$; $p \parallel q$; $p \perp q$.

Voor een deel van de andere beweringen verdient het aanbeveling ook formules te gebruiken.

*Voorbeelden van uitdrukkingen in oude en nieuwe formulering*:

| | OUD | NIEUW |
|---|---|---|
| (3.1) | R ligt op AB | $R \in AB$ |
| | of beter: R ligt op $m$ | $R \in m$ [16]). |
| (3.2) | (de lijnen) $p$ en $q$ snijden elkaar in S | $p \cap q = S$ |
| (3.3) | A en B liggen op een gegeven cirkelomtrek | De cirkelomtrek krijgt eerst als volgt een naam: Zij $c$ een cirkelomtrek; en $A \in c$, $B \in c$ |
| (3.4) | Twee cirkels ($c_1$ en $c_2$) hebben geen punt gemeen | $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ |
| (3.5) | De meetkundige plaats van de punten, die op afstand $r$ van P liggen | De verzameling van alle punten X zodat afst. $XP = r$. Dat is de cirkel: $\{X \mid \text{afst } XP = r\}$ |

(3.6) De meetkundige plaats van de punten die even ver verwijderd zijn van twee punten A en B, is de middelloodlijn van het lijnstuk AB.

Dit wordt, en we beginnen met een naamgeving: Noem de middelloodlijn van het lijnstuk AB $m$. Dan geldt

$$\{X \mid XA \cong XB\} = m$$

($XA \cong XB$ is een manier om uit te drukken dat afstand $XA =$ afstand XB). Teneinde de stelling te bewijzen, formuleren we het nog op een tweede manier, namelijk

---

[16]) Het gebruik van eenvoudige symbolen voor veel voorkomende objecten of begrippen houdt in, dat men vaak voor een lijn of een lijnstuk een letter zal gebruiken. Dit werd eerder bepleit door P. Wijdenes: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde jg. 44 p. 1.

$$XA \cong XB \Leftrightarrow X \in m$$

waarbij $\Leftrightarrow$ gebruikt is voor de gelijkwaardigheid der beweringen. Het „te bewijzen" wordt nu gesplitst in de volgende twee delen

$$XA \cong XB \Rightarrow X \in m$$

(waarin $\Rightarrow$ implicatie betekent) alsmede:

$$XA \cong XB \Leftarrow X \in m$$

Daarna volgt het bewijs waarin eventueel het oude symbool

$\therefore$ ook vervangen wordt door $\Rightarrow$

(3.7) Bij de bissectrices komt men de uitdrukking „binnen de hoek gelegen" wel eens tegen. Wij kunnen hier het begrip verzameling ook met vrucht gebruiken. Stel $\alpha$ is de verzameling van alle punten binnen of op een uitspringende hoek BAC. (Men zou aan $\alpha$ de naam massieve (tweedimensionale) hoek kunnen geven, of ook hoek (zonder meer)). Nu geldt bijvoorbeeld, indien $p$ en $q$ de benen (halfrechten) van A zijn, en $m$ is de deellijn:

$$\{X|Xp \cong Xq \text{ èn } X \in \alpha\} = m \cap \alpha$$

of in een andere formulering: Indien $X \in \alpha$, dan geldt:

$$Xp \cong Xq \Leftrightarrow X \in m$$

Met $Xp$ is bedoeld de figuur die bestaat uit X en $p$, die op onzichtbare wijze verbonden zijn aan elkaar. Het congruentiesymbool $\cong$ is hier equivalent met gelijkheid van afstanden. Men kan weer $\Leftrightarrow$ splitsen in $\Rightarrow$ en $\Leftarrow$ voor het bewijs. Na dit bewijs kan men dan de corresponderende stelling voor twee snijdende rechten vinden door het voorgaande toe te passen op de vier massieve hoeken, die zij maken.

(3.8) Een bekende stelling over de gemeenschappelijke koorde van twee cirkels wordt als volgt uitgedrukt.

Geg.: $c_1$ en $c_2$ zijn cirkels met middelpunten $M_1$ en $M_2$ en met als doorsnee het puntenpaar [17])

$$c_1 \cap c_2 = A \cup B$$

De middelloodlijn van het lijnstuk AB zij $m$.

Te bewijzen: $M_1 \in m$, $M_2 \in m$.

(3.9) Een bekende stelling betreffende vierhoeken wordt als volgt uitgedrukt:

---

[17]) Wij zullen de leerling niet belasten met het fijne verschil tussen het element (punt) A en de verzameling die bestaat uit één element, in dit geval soms aangeduid met $\{A\}$.

Geg.: Vierhoek ABCD. $AC \cap BD = E$, $AE \cong CE$, $BE \cong DE$.
Te bewijzen: AB//DC en AD//BC.

(3.10) Terzijde merk ik op dat ik in leerboeken aantrof, dat een *trapezium* een vierhoek is, waarvan twee zijden evenwijdig zijn en de andere twee *niet* evenwijdig. Volgens deze definitie is een parallellogram niet een bijzonder voorbeeld van een trapezium. Dat lijkt me ongewenst ook al is er een zeker gemak bij de gebruikelijke volgorde van definities en stellingen in de leerboeken in dit verband. Bij de behandeling der gelijkbenige trapezia zal men wellicht uitgaan van een trapezium met twee gelijke binnen-basishoeken dus van de zgn. gelijkhoekige trapezia. De definities moeten zo zijn dat:

| | |
|---|---|
| een vierkant is een bijzonder(e) | ruit |
| | parallellogram |
| | rechthoek |
| | trapezium |
| | vierhoek |
| een ruit is een bijzonder(e) | parallellogram |
| | trapezium |
| | vierhoek |
| een rechthoek is een bijzonder(e) | parallellogram |
| | trapezium |
| | vierhoek |
| een parallellogram is een bijzonder(e) | trapezium |
| | vierhoek |

evenals:
een geheel getal is een bijzonder rationaal getal
een rationaal getal is een bijzonder algebraïsch getal
een reëel getal is een bijzonder complex getal.

Het verzameling begrip kan hier wellicht nog een verheldering geven: Wat een parallellogram is, blijft altijd een beetje vaag, ondanks de definitie. Men is geneigd te denken aan een exemplaar dat *niet bijzonder* is. Bij het begrip Nederlander kan men zich veel beter een bijzonder exemplaar bijv. een blinde, een minister of een leraar als voorbeelden denken. Daarom kan het aanbeveling verdienen in de meetkunde te denken aan *de verzameling van alle vierhoeken, de verzameling van alle trapezia, de verzameling van alle parallellogrammen. Onder de vierhoeken heeft men die welke twee paar evenwijdige zijden hebben. Die heten de parallellogrammen. Elk zo een vierhoek heet een parallellogram. Bijvoorbeeld een vierkant* (!).

(3.11) De begrippen *lengte, oppervlakte, inhoud, integraal* hebben gemeen dat zij getalwaarden aan sommige puntverzamelingen toe-

kennen. Oppervlakte is een *functie* gedefiniëerd op driehoeken en andere vlakke gebieden, en met niet-negatieve getallen als waarden. „Oppervlakte van" is een automaat waar men een gebied instopt, en dan komt er een getal uit. De eigenschappen van deze automaat worden in de schoolleerboeken genoemd. De automaat heeft ook een naam, namelijk oppervlakte. Het verdient echter aanbeveling *ook te vertellen dat het een automaat is,* en dat deze te vergelijken is met de automaten uit de algebralessen, die de functies zijn.

Ook *is het goed aan de automaat een eenvoudig symbool bijv. I te hechten. De belangrijke eigenschappen,* die nu gebruikt worden, *zijn,* en ik geloof zeker dat de leerling het volgende kan begrijpen:

Zijn $G_1$ en $G_2$ gebieden en is $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, dan is

$$I(G_1 \cup G_2) = I(G_1) + I(G_2). \qquad \text{(a)}$$

Is $G_1 \cong G_2$ dan is

$$I(G_1) = I(G_2). \qquad \text{(b)}$$

Merk op dat wij hier zelfs gebieden die driehoeken of vierhoeken of cirkels kunnen zijn door één letter (hier met index) voorstellen.

De twee genoemde wetten komen telkens, eventueel gecombineerd met andere, weer voor. Bijvoorbeeld:

$G_1$ en $G_2$ zijn lijnstukken; $I$ is *lengte*
lichamen; $I$ is *inhoud*

Men ontmoet (a) ook in de volgende voorbeelden:

$G_1$ en $G_2$ zijn intervallen op de getallenrechte; $I$ is de *integraal* van een zekere functie van één variabele.

$G_1$ en $G_2$ zijn gebieden in het getallenparenvlak; $I$ is een *tweevoudige integral* van een functie van twee variabelen.

In de kansrekening: $G_1$ en $G_2$ zijn gebeurtenissen; $I$ is *„de kans op".*

Door deze automatisering, die een gemeenschappelijk aspect van de genoemde begrippen kernachtig uitdrukt, valt de analogie veel sterker op en kan het geheel van al deze gevallen in de loop der schooljaren èn later, sneller en gemakkelijker begrepen en overzien worden.

4. *Analytische meetkunde en stereometrie.*

4.1. *Een coördinaat is een lineaire functie. Coördinaat gaat vóór stelsel van coördinaten* (bij het vlak of de ruimte).

Een van de onderwerpen, die reeds in het begin van de leertijd in de schoolwiskunde zal voorkomen, is *het in tekening brengen van functies welke aan punten in het vlak getallen toekennen.*

*Voorbeelden*:

*Opgave*: (voor de leerling) Gegeven is een vast punt Q in het vlak van tekening. Schrijf voor een groot aantal punten, die je zelf mag kiezen, de waarde van de functie die de afstand tot Q is, bij die punten. Wat zijn de figuren van constante functiewaarde? N.B. denk aan isobaren, isothermen, enz.

*Opgave*: Gegeven is in het vlak van tekening een vaste rechte $p$. Schrijf voor een groot aantal punten, die je zelf mag kiezen, de waarde van de functie die de afstand tot $p$ is, bij die punten. Noem die functie $\varphi$, en de functiewaarde bij het punt X, $\varphi(X)$. Het is duidelijk dat $\varphi(X) \geqq 0$ voor alle X.

*Opgave*: Idem voor de functie die aan elk punt de waarde 7 hecht. (Dit is de constante functie 7).

*Opgave*: Idem voor de volgende functie $\xi$. $\xi$ is de functie die aan punten op de lijn $p$ de waarde nul hecht; die aan de ene kant van de lijn $p$ gelijk is aan de afstand tot $p$, en die aan de andere kant van $p$ gelijk is aan het tegengestelde van de afstand tot $p$. N.B. Zo'n functie heet functie van Hesse bij de lijn $p$. Weet men van een overigens onbekend punt P hoeveel zijn functiewaarde $\xi(P)$ is, dan weet men dat P op een heel bepaalde rechte lijn moet liggen.

*Opgave*: Wij hebben zojuist de functie $\xi$ in tekening gebracht. Breng nu de functie $\xi + 2$ in tekening. In een volgende opgave de functie $3\xi$; daarna $3\xi + 2$. Deze en analoog verkregen functies heten *lineaire functies op het vlak.*

Ten einde de genoemde vraagstukken voor te bereiden, verdient het misschien aanbeveling een enkele functie van één variabele op analoge manier in tekening te brengen. Men tekent de gewone getallenrechte met aan de onderkant namen van getallen als op een lineaal. (Tussen haakjes: deze namen $x$ brengen ook reeds een functie in tekening). En vervolgens schrijft men bij de rechte een aantal waarden van de functie, bijv. van $x^2$. In dit verband denke men aan de logaritmische schaalverdeling en logaritmisch papier. De bovengenoemde functie $\xi$ kan de rol van *een coördinaat* gaan spelen. Om twee coördinaten te krijgen, beschouwen we twee eventueel loodrechte lijnen $p$ en $q$, en construeren daarbij functies $\xi$ en $\eta$ als boven. Bij een groot aantal punten schrijven we de functiewaarden van $\xi$ en $\eta$. (Getallenparen $(\xi; \eta)$). Wij zien verder dat er precies één punt is waar de functie $\xi$ een gegeven waarde bijv. 3

en tevens de functie $\eta$ een gegeven waarde bijv. $-7$ heeft. Bij dat punt staat geschreven (3; $-7$).

Dit onderwerp kan misschien reeds in de tweede klasse ter sprake worden gebracht, maar in elk geval moet het in de analytische meetkunde voorkomen, en bijv. daar, waar de coördinaten worden ingevoerd. Het belang van dit onderwerp ligt in het wennen aan het praten over functies en aan de verwijding van het begrip functie. Voorzover het coördinaten betreft is de kern van de zaak: het eerst invoeren van één coördinaat = lineaire functie in het platte vlak. Dit in tegenstelling tot het gebruik dat wil, dat twee of drie coördinaten tegelijk worden ingevoerd.

4.2. *Vectoren.* Over dit onderwerp kan ik kort zijn. Natuurlijk moet analytische meetkunde met vectoren worden opgezet, zoals in het leerboekje van Bijl, Kijne en Salet. Dat wil zeggen rijtjes of kolommen van 2 of 3 getallen, elk rijtje voorstelbaar door één letter, met illustratie aan pijlen in tekeningen. In elk geval schrijve men *niet* „het punt met de coördinaten $x = 3$, $y = 4$ en $z = 8$", *doch* „het punt (3; 4; 8)" dan wel het punt $(x; y; z) =$ (3; 4; 8). Ik vind het jammer dat de heren Gribnau en Van der Neut niet een krachtiger antwoord hebben gegeven op een desbetreffende vraag [18]). Dit temeer, omdat een leerboekje ter beschikking staat, waaruit iedere leraar de stof kan leren. Wat voor zin heeft het om dan ook zelfs maar te overwegen, het nieuwe vak analytische meetkunde op de HBS, op een ouderwetse manier aan te vangen? Of moet het nieuwe onderwijs in de analytische meetkunde beslist gelijk zijn aan het oude onderwijs op het gymnasium?

4.3. *De drie-dimensionale analytische meetkunde in het V.H.M.O.* Als één doel van het onderwijs in de analytische meetkunde zie ik, dat de leerling eraan went een complex van twee of zelfs drie getallen te zien als één object. Vandaar ook dat dit object soms een eenvoudige naam (één letter) zal moeten hebben. De leerling leert dit vooral, als hij met de vectoren vertrouwd raakt. De wens dat de leerling een rij van 2 of meer getallen als één ding kan aanvoelen, leeft in vele wiskunde-toepassende wetenschappen, zoals

---

[18]) In Euclides jg. 35, 1959, blz. 17 hebben Dr. Gribnau en Dr. van der Neut toelichtende antwoorden gegeven op vragen betreffende het nieuwe leerprogramma. Op de vraag „Is het geoorloofd de analytische meetkunde te behandelen met behulp van vectoren, zoals dit volgens moderne opvatting geschiedt?" luidde het antwoord ongeveer: „Dit is stellig toegestaan; men bedenke echter dat de eindexamenopgaven gebaseerd zullen zijn op de toepassing van de ouderwetse methode".

de natuurkunde, de statistiek, de biologie, de economie, en de variantie-analyse in de landbouwwetenschappen.

Om deze reden is *noodzakelijk dat* ook *de driedimensionale analytische meetkunde op het V.H.M.O. wordt geplaatst.* Bezwaren hiertegen kan ik niet bedenken. Mijn eerstejaars studenten in Wageningen (die niet speciaal om de wiskunde in Wageningen gaan studeren) hebben absoluut geen moeite met de drie-dimensionale, en weinig moeite met de $n$-dimensionale, analytische meetkunde [19]).

*Het onderwijs in de drie-dimensionale analytische meetkunde, met de vectoren als uitgangspunt, dient met de stereometrie sterk verbonden en verweven te worden, en zelfs dient de analytische meetkunde als uitgangspunt voor de stereometrie genomen te worden.* Daarmee wordt een deel van de stereometrie, namelijk het begin, opgerold. D.w.z. dat men de stellingen in het begin van de leerboeken der stereometrie zeer snel gemakkelijk afleidt. De hier gegeven mening sluit dus wat betreft de stereometrie aan bij het ,,wèg met Euclides'' van Professor Dieudonné.

Enige onderwerpen in de analytische meetkunde die in belang zullen afnemen, zijn: bundels kegelsneden; pool- en poollijn van een kegelsnede; brandpunten van kegelsneden.

Van toenemend belang is de *lineaire afhankelijkheid van vectoren,* en bij voorkeur vertoond in de drie-dimensionale ruimte, omdat de twee-dimensionale ruimte te laag-dimensionaal is, om veel te kunnen laten zien. Voorts zullen *de functies op het vlak* (functies van twee variabelen) *in belang toenemen ten koste van de krommen en de vergelijkingen.* Zie [19]) en [7]). Men zal dus bijvoorbeeld bestuderen en in tekening brengen de functie $x^2 - y^2$. Daarbij kan men in het bijzonder tekenen (alles in één figuur) de punten waarvoor deze functie de waarde 1, 0, of $-1$ heeft.
In plaats van één cirkel te beschouwen, zal de interesse verschuiven naar de machtsfunctie van die cirkel, dus naar de functie $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$.

4.4. *Uit-produkt en determinant.* Men heeft wel bepleit [20]) om bij het onderwijs in vectoren niet alleen het in-produkt op te nemen doch ook het uit-produkt en de determinanten. Het uit-produkt in de drie-dimensionale vorm waarbij aan twee vectoren een derde vector wordt toegevoegd, is van belang voor toepassing in de

[19]) N. H. Kuiper, Analytische Meetkunde Dictaat. Uitg. Wageningse Hogeschoolvereniging. Studenten Inl. Dienst. Wageningen.
[20]) Dr. H. Streefkerk. Euclides 34 (1959) p. 278.

natuurkunde in de elektriciteitsleer. In andere opzichten is het van weinig waarde. Dit uit-produkt behoeft niet in het V.H.M. Onderwijs wiskunde te worden opgenomen.
(Een verwant begrip, n.l. het uit-produkt van differentiaalvormen, speelt wèl een belangrijke rol in de moderne wiskunde (differentiaalmeetkunde) en is ook voor de ontwikkeling van de theorie der meervoudige integralen van belang. Dit gaat echter voorlopig tè ver voor het V.H.M.O.).

Ook heeft men leerstof die samenhangt met de determinanten [20]) [21]) bepleit. Determinanten $2 \times 2$ en $3 \times 3$ vormen een geriefelijk hulpmiddel in de wiskunde. Men bedenke echter dat determinanten niet meer gebruikt worden voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. Dit doet men tegenwoordig met matrices, of men laat het de elektronische rekenmachine doen, die het zelf ook met matrices doet! Merkwaardig genoeg valt dit oplossen (van de machine) weer in hoge mate samen met de manier van oplossen van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden zoals het op school gebeurt. *Het is dus ouderwets en het is niet moderne hoge wiskunde, om in de praktische toepassingen stelsels lineaire vergelijkingen met behulp van determinanten op te lossen.*

5. *Stereometrie.*

Afgezien van de opzet met analytische meetkunde zijn op dit onderwerp nog de opmerkingen over verzamelingen en eenvoudige symbolen, die ik voor de vlakke meetkunde maakte, van toepassing.

6. *Goniometrie.*

Vooral nu de goniometrische functies bij de differentiaalrekening een rol gaan spelen, is het goed het volgende onderscheid te maken tussen *twee functies sinus*, en analoog voor cos enz.

A. *Van hoeken naar getallen.* In de eerste plaats is er sprake van een functie sinus welke aan hoeken getallen toevoegt. Van de hoek is daarbij alleen de grootte van belang. Die grootte kan worden uitgedrukt in *graden* of in *radialen.*

B. *Van getallen naar getallen.* Onder de functie sinus in de hogere wiskunde verstaat men echter steeds een functie die getallen op getallen afbeeldt. De definitie *kan* via de meetkunde gebeuren. Men heeft een getal, men kiest een boog op een cirkel die zich verhoudt tot de straal als dat getal tot één. Men beschouwt de sinus van de

---

[21]) Dr. P. M. van Hiele. Euclides 35 (1960) p. 177.

hoek bij die boog. Dat is een getal en dat is de functiewaarde. Het heeft zin om te spreken van sin (sin 3). *In dit verband heeft het echter geen zin om te spreken over radialen, evenmin als het zin heeft om te zeggen, dat in* log $x$ *het getal* $x$ *in radialen is uitgedrukt.*

7. *Algebra* (= Schoolalgebra).

Over het onderwijs in de schoolalgebra in de eerste jaren heb ik weinig op te merken. De technische vaardigheid die men ontwikkelt, is noodzakelijk voor elk verdergaand wiskundig of natuurwetenschappelijk werken. (Dit realiseert men zich vooral indien men studenten uit onderontwikkelde gebieden ontmoet!)

7.1. Bij de getallen wordt in leerboeken soms *onvoldoende onderscheid* gemaakt *tussen het getal en het symbool voor een getal.* Natuurlijk kan men niet voortdurend zeggen „het getal dat voorgesteld wordt door 5" in plaats van „het getal 5". Maar op bepaalde momenten moet dit wel. Bijv. bij de invoering van de negatieve getallen en de rationale getallen. De volgende definitie van breuk acht ik bijvoorbeeld onaanvaardbaar: „Onder een breuk verstaan we een getal met een streep daaronder en daaronder weer een getal, het geheel beschouwd als een getal van een nieuwe soort". Hiervoor in de plaats zou het volgende kunnen komen:
Wij zullen *nieuwe getallen* gaan invoeren. Deze zullen *rationale getallen* heten. *Eerst vertellen we hoe deze getallen worden voorgesteld.* Een rationaal getal wordt voorgesteld door twee gehele-getal-symbolen, de een onder de ander, en met een horizontale streep ertussen.
Voorbeelden $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{1}$.
Een uitzondering vormen de uitdrukkingen met 0 onder de streep. Deze tellen niet mee. (Zo een uitdrukking is geen rationaal getal. Het is onzin, d.w.z. er wordt geen zin aan gehecht.)

Na de definitie stelt men eerst vast dat de rekenregels voor quotiënten gelden voor het reeds bekende geval dat „de deling opgaat", en dan komt de bijzonderheid dat een getal van de nieuwe soort door verscheidene symbolen kan worden voorgesteld! Het rationale getal voorgesteld door $\frac{3}{2}$ is hetzelfde getal als dat voorgesteld door $\frac{6}{4}$.
Korte notatie: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$.
Enzovoort.

7.2. *Invoering van de negatieve getallen en het begrip groep.*

Ik zou de negatieve getallen als volgt invoeren:

a. Je kent het getal dat door 5 wordt voorgesteld. Andere voorstellingen van dit getal zijn V en :·:·

We zullen er nog een andere voorstelling aan verbinden (en nu kruipt de optel*groep* om de hoek). Denk je de symbolen 0, 1, 2, 3, 4 enz. en de symbolen —1, —2, —3, enz. De laatsten zijn de oude symbolen voorzien van een teken —. Denk ze op een rij gezet als volgt

$$-5, \ -4, \ -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5$$

Noem deze rij een *trein*. De trein kan naar rechts of naar links gaan. *Het getal* voorgesteld door *vijf* stellen we voor door *de beweging van de trein over vijf stappen naar rechts. Optellen is na elkaar bewegen.* De ons bekende regels voor optellen en aftrekken van de ons bekende getallen 0, 1, 2, 3, · · · kunnen worden gecontroleerd. 3 aftrekken betekent 3 naar links gaan. *Wij stellen een beweging van de trein voor door het symbool dat stond op de plaats waar de* 0 *terecht komt.* Naast de symbolen 0, 1, 2, . . . die we reeds kenden treden nu de symbolen —1, —2 enz. ook op. Wij zien: *De reeds bekende (positieve) getallen kunnen* worden opgevat als *bewegingen van de trein naar rechts* (isomorfie). Wij voeren een nieuw systeem van getallen in door de afspraak: *Elke beweging van de trein over een eindig aantal stappen naar rechts of naar links is een getal.* Onder de bewegingen wordt ook als bijzonder geval gerekend de *stilstand,* die de rol van *nul* (0) speelt.
Aftrekken wordt gedefiniëerd door

$$a + ? = b$$

en het resultaat wordt voorgesteld door

$$? = b - a.$$

Om didactische overwegingen zal de leraar dit eerst met gewone getallen behandelen.

$$5 + ? = 7 \qquad ? = 7 - 5$$
$$5 + ? = 2 \qquad ? = 2 - 5$$

Opmerkelijk is dat

$$6 + (-6) = \text{stilstand}$$

en ook

$$-6 + (6) = \text{stilstand}.$$

Def. Is $a$ een beweging, dan is $-a$ de evengrote tegengestelde beweging. Dus: $-(6) = -6$ klopt; doch ook $-(-6) = 6$, hetgeen we nog niet wisten.
De absolute waarde $|a|$ van het gehele getal $a$ is het aantal stappen van de trein bij de beweging $a$.

7.3. Wat betreft *het gebruik van letters voor getallen* herhaal ik wat ik zei tijdens de vorige vakantiecursus: *De invoering van een letter x voor een voorlopig onbekend getal dient reeds bij het lager onderwijs te geschieden. Daarmee kunnen op de lagere school vele moeizaam te maken sommen vervallen, terwijl de ontwikkeling van het kind versnelt, zonder dat meer moeite wordt gevergd.*

7.4. *Logaritmen.* In het onderwijs wordt het werken met logaritmen vaak moeilijk gemaakt door achtereenvolgens 1. de rekenregels ($\log ab = \log a + \log b$) aan de leerlingen te leren (met bewijs), en daarna 2. nooit meer terug te komen op de definitie tijdens het werk. Mijn collega te Dordrecht C. Visser, thans hoogleraar in Leiden, gebruikte een kennismakende methode, die ook mij bijzonder goed is bevallen. In de tweede klasse leerde hij hoe je getallen met behulp van „een zekere tafel" als machten van 10 kunt schrijven. Hij gebruikte deze methode om vermenigvuldigingen uit te voeren, zonder dat nog ooit het woord logaritme was gevallen. Bijv.:

$$2{,}416 \times 1{,}520 = 10^{0{,}3831} \times 10^{0{,}1818}$$
$$= 10^{0{,}3831+0{,}1818} = 10^{0{,}5649} = 3{,}672.$$

Dit werd met vele voorbeelden geoefend.

7.5. *De definitie van een functie.* Het begrip functie wordt in de leerboeken op vele manieren gedefiniëerd, maar de meeste van deze definities bevredigen mij niet. Zij zijn niet zakelijk en vaak zeggen ze in enige volzinnen bij nadere analyse zeer weinig. Voorbeelden: „Het komt dikwijls voor, dat tussen de waarden, die twee grootheden $x$ en $y$ kunnen aannemen, een verband is aangegeven op zodanige wijze dat het mogelijk is, bij elke waarde van $x$ de bijbehorende waarde(n) van $y$ te vinden."

„$f(x)$ is een functie van $x$, als er een of ander rekenvoorschrift is gegeven, waardoor we $f(x)$ kunnen berekenen."

Bij mijn onderwijs aan de Landbouwhogeschool heb ik de moeilijkheid van de definitie ook ondervonden. (Zie [9]).

Een gewone functie wordt in de moderne wiskunde als volgt gedefinieerd. Beschouw de verzameling van alle geordende paren getallen $(x, y)$. Een deelverzameling $V$ daarvan heet een *relatie.* De relatie geldt tussen $a$ en $b$ indien $(a, b) \in V$. Een relatie heet een (éénwaardige) *functie,* indien elk getal hoogstens één keer als eerste in een paar voorkomt. (Meerwaardige functies worden in de theorie der complexe functies beschouwd; die laten we bij het

V.H.M.O. in elk geval buiten beschouwing.) Ik ben zeker dat dit de definititie van functie in het V.H.M.O. van morgen zal zijn. De definitie geeft de kern van het begrip. Een bijzondere verdienste acht ik het ontbreken van het woord „rekenvoorschrift". Er zijn geen overbodige associaties.

Een andere voorlopig bevredigende bepaling van het begrip functie [9]) is als volgt. Een functie $f$ is een automaat. Men stopt er een getal in en dan komt er, *als het past* (!), een getal uit. Stopt men hetzelfde getal er twee keer in, dan krijgt men er twee keer hetzelfde getal uit. Van sommige van die automaten kan men de werking door een eenvoudig rekenvoorschrift beschrijven. Bijvoorbeeld de automaat $x \rightarrow x^2$, de automaat kwadraat, de automaat *log*. Dat geldt niet voor elke functie. Immers iedereen kan zelf automaten verzinnen. Als maar aan de bovengenoemde voorwaarden is voldaan zal de automaat een functie heten. N.B. *De automaat (functie) heet $f$ en niet $f(x)$* (!)

7.6. *Grafiek van een functie.* Het begrip functie is bij de leerling vaak in te sterke mate gebonden aan de gewone grafiek van die functie. Teneinde deze binding te verminderen, kan men voor de afwisseling de afstand tot een horizontale rechte wel eens als $x$-coördinaat en die tot een verticale rechte als $y$-coördinaat nemen ($x$-as verticaal, $y$-as horizontaal). Een aldus verkregen grafiek van een functie $f : x \rightarrow y$ is tevens de gewone grafiek van de inverse functie $f^{-1} : x \leftarrow y$. Dit verheldert het begrip inverse functie en brengt de leerling nader tot het begrip afbeelding.

7.7. *Limieten.* Met betrekking tot het begrip limiet vindt men in de leerboeken vaak onbevredigende beweringen. In het bijzonder ontmoet men soms uitdrukkingen die meer geladenheid suggereren dan men in de wiskunde zou verwachten. Bijvoorbeeld:

„$n \rightarrow \infty$ betekent dat $n$ groter is dan elk aan te geven getal, hoe groot men dat ook kiest";
„Als we zeggen „$x$ nadert tot oneindig" bedoelen we „$x$ neemt onbeperkt toe";"
„Het verschil komt willekeurig dicht bij nul";
„Het onbepaald naderen van $x$ tot $a$ heeft het onbepaald naderen van $y$ tot $L$ tengevolge";
„Op den duur".

Al deze beweringen zijn vaag doordat zij niet ter zake doende associaties opwekken. Zij zijn onvoldoende gereinigd in de zin van deel I van mijn voordracht. De kern van de zaak wordt niet ge-

grepen. Men dient ernaar te streven de overbodige associaties kwijt te raken.
Een moderne behandeling van limieten is als volgt. Vergelijk [9]).

*Eerst A*: *Definitie van omgevingen.* Een open interval, dat is een interval zonder de uiteinden, is een *omgeving*. Bijvoorbeeld $U = \{x|a < x < b\}$. Het is een *omgeving van elk punt* $z \in U$. Is $U$ een omgeving van $z$ dan heet $U \cap \{x|x \geqq z\}$ een *rechts-omgeving* van $z$ en analoog definiëert men een *links-omgeving* van $z$. Hoewel $\infty$ en $-\infty$ geen getallen voorstellen, definieert men voorts: Is $z$ een getal, dan is $U = \{x|x > z\}$ een omgeving van $+\infty$. Analoog definiëert men een omgeving van $-\infty$.

*Dan B*: *Definitie van continuïteit.* Een functie $f : x \rightarrow f(x) = y$, heet *continu* voor $x = a$, indien $f(a) = b$ bestaat, en indien bij elke omgeving $V$ van $b$ een omgeving $U$ van $a$ bestaat zo dat $f(U) \subset V$.
Is $f$ niet gedefinieerd voor alle getallen in $U$ dan beperkt men zich tot al de waarden van $U$ waarvoor $f$ wel gedefinieerd is.
De functie heet *rechts-continu* voor $x = a$, indien $f(a) = b$ bestaat, en indien bij elke omgeving $V$ van $b$ een *rechts-omgeving* $U$ van $a$ bestaat zó dat $f(U) \subset V$,

*Tenslotte C. Definitie van limiet.* Is de functie $f$ gedefinieerd voor $x = a$, dan heet $b$ de limiet van $f$ voor $x = a$, indien $f(a)$ gelijk is aan $b$, en indien tevens $f$ continu is voor $x = a$. In formule:

$$\lim_{x=a} f(x) = b$$

Is de functie $f$ niet gedefinieerd voor $x = a$, dan heet $b$ de limiet van $f$ voor $x = a$, indien de nieuwe functie, die ontstaat uit $f$ door nog aan $a$ het getal $b$ toe te voegen, continu is voor $x = a$.
Rechts-limiet en links-limiet kunnen ook op passende wijze gedefiniëerd worden.

De limieten voor $x = \infty$ vragen een aparte behandeling. Naast de getallen beschouwen we daartoe *nog twee elementen, waar we nooit algebraïsche operaties mee zullen uitvoeren*, namelijk elementen voorgesteld door de symbolen $+\infty$ en $-\infty$. Het element $+\infty$ wordt dan ook tot elke „omgeving van $+\infty$" gerekend.
Een functie heet gedefinieerd op $+\infty$, indien ook aan $+\infty$ een getal, of het symbool $+\infty$, of het symbool $-\infty$ als „waarde" is toegevoegd. (Denk aan de automaat.)
Een functie $f$ met waarde $f(+\infty) = b$ heet continu in $+\infty$, indien bij elke omgeving $V$ om $b$ een omgeving $U$ van $+\infty$ bestaat, zó

dat $f(U) \subset V$. Onder deze omstandigheden heet $b$ de limiet van de functie $f$ voor $x = +\infty$.
Voorbeeld: $f$ zij de functie die gedefiniëerd is op de natuurlijke getallen en op $+\infty$, en die gegeven wordt door de formule

$$f(n) = \frac{2n+3}{n+5}, \text{ terwijl } f(+\infty) = 2.$$

Deze functie is continu voor $n = \infty$ en dus is per definitie de limiet van $f$ voor $x = +\infty$ gelijk aan 2. $\lim\limits_{n=\infty} f(n) = 2$.
Voor geval $f(+\infty)$ niet is gedefiniëerd probeert men een continumakende waarde $b$ aan $+\infty$ toe te voegen. Is $b$ zo een waarde dan is $b$ de limiet van $f(x)$ voor $x = +\infty$.
*Het onbewegelijke statische karakter van het aldus ingevoerde begrip limiet wordt mede tot uitdrukking gebracht in de notatie.* Immers ik schrijf „limiet voor $x = +\infty$" en *niet* „limiet voor $x \to \infty$".
Teneinde met limieten te kunnen werken bewijst men *eerst de stellingen over continuïteit*: De som, het produkt, de samenstelling enz. van twee continue functies is continu.
Met de definitie van limiet *volgen* daaruit *vanzelf de stellingen over limieten.*
*Van het bovenstaande kan de behandeling van limieten voor $x = a$, waarbij $a$ een getal is en niet het element $+\infty$ of $-\infty$, zonder meer in het V.H.M.O. worden overgenomen.* De uitdrukkingen „willekeurig dicht bij" en „onbepaald naderen" zijn daarmee vermeden.
Exacte volledige bewijzen betreffende continuïteit en limieten waarin *de $\varepsilon$-$\delta$-techniek* wordt toegepast, *acht ik voor het V.H.M.O. te zwaar.* De gegeven definitie van continuïteit is logisch gelijkwaardig met de $\varepsilon$-$\delta$-definitie.
De limieten voor $x = \infty$ zijn op de hier aangegeven wijze wellicht nog te moeilijk voor het V.H.M.O. Misschien past deze methode voor dit geval eerst in „het V.H.M.O. van overmorgen".

7.8. *Integraalrekening.* Bij de eerder genoemde beantwoording van vragen betreffende het nieuwe onderwijsprogramma hebben de heren Gribnau en Van der Neut ook als antwoord gegeven: Aan de orde moet komen het begrip *bepaalde integraal* als limiet van een som. Ik zou hiervoor in de plaats *de axiomatische definitie* willen *aanbevelen* die aansluit bij de begrippen oppervlakte enz. (zie 3.11), en wellicht zonder de streng axiomatische opzet en zonder het woord axioma te noemen. Ik bedoel de aanpak, die uitgaat van de volgende eigenschappen (axioma's):

(1) $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

(2) Is $t(x)$ een positieve trapfunctie, dan is

$$\int_a^b t(x)dx$$

gelijk aan de oppervlakte van een zekere som van rechthoeken.

(3) Voor elke continue functie is $\int_a^b f(x)dx$ een getal.

(4) $$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

En dan tenslotte de belangrijke eigenschap:

(5) $f(x) \geqq g(x)$ voor alle $x$ impliceert

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx.$$

*Bij beperking tot trapfuncties zijn al deze eigenschappen volkomen aanvaardbaar en duidelijk voor de leerling.*
Men kan nu bewijzen (maar zal het niet doen in het V.H.M.O.) dat elke *continue functie* een integraal heeft. Verder bewijst men gemakkelijk door gewoon (maar ècht) differentiëren de fundamentele eigenschap:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

die uitdrukt dat integreren in zeker opzicht het omgekeerde van differentiëren is.
Deze axiomatische definitie sluit aan bij de kansrekening en de Stieltjes integralen. Men kan hier ook van een automaat (functionaal) spreken, waarin men enerzijds intervallen of andere puntverzamelingen, doch anderzijds tevens functies (die geïntegreerd moeten worden) kan stoppen, teneinde een getal als antwoord te krijgen. Welke de eigenschappen van die automaat zijn, zullen we niet aan de leerling in deze vorm vertellen.

# HET DIFFERENTIAALQUOTIËNT VAN LOG $x$

door

Dr. A. F. MONNA
'S-Gravenhage

De discussies over de vraag of het differentiaalquotiënt van $\log x$ al dan niet in het nieuwe leerplan zou moeten worden opgenomen gaven mij destijds aanleiding de volgende minder traditionele methode ter bepaling van dit differentiaalquotiënt op te stellen. Ik ga daarbij uit van een gewijzigde probleemstelling.

Gevraagd wordt een continue functie $f(t)$, gedefiniëerd op het interval $[1, \infty)$, te vinden zodanig dat voor alle $x \geqq 1$ geldt

$$^{10}\log x = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Uit de geldigheid van (1) volgt voor $y \geqq x \geqq 1$

$$\log \frac{y}{x} = \log y - \log x = \int_1^y f(t)\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^y f(t)\mathrm{d}t.$$

Voor $\lambda \geqq 1$ dus

$$\log x = \log \frac{\lambda x}{\lambda} = \int_\lambda^{\lambda x} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Door in de eerste integraal te substitueren $t = \lambda u$ volgt

$$\lambda \int_1^x f(\lambda u)\mathrm{d}u = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t,$$

geldig voor alle $x \geqq 1$, $\lambda \geqq 1$.

Daar $f$ continu is ondersteld geeft differentiatie naar $x$

$$\lambda f(\lambda x) = f(x) \tag{2}$$

voor $x \geqq 1$, $\lambda \geqq 1$.

Neem nu $x = 1$ en stel voorlopig $f(1) = C$. Dan volgt uit (2) voor $\lambda \geqq 1$

$$f(\lambda) = \frac{C}{\lambda},$$

dus, door weer over te gaan op de variabele $t$

$$f(t) = \frac{C}{t} \qquad (t \geqq 1). \tag{3}$$

Voor $x \geqq 1$ derhalve

$$^{10}\log x = C \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{4}$$

De constante $C$ kan men bepalen door voor $x$ een bepaalde waarde te kiezen, bijv. $x = 2$. Dan volgt

$$C = {}^{10}\log 2 \cdot \left(\int_1^2 \frac{dt}{t}\right)^{-1}, \tag{5}$$

dus in het bijzonder $C > 0$.

Uit (4) volgt dan

$$\frac{d\, {}^{10}\log x}{dx} = \frac{C}{x}.$$

Het getal e kan worden ingevoerd door op zodanige wijze een nieuw grondtal te bepalen dat de constante $C$, die afhankelijk is van het grondtal, voor dit nieuwe grondtal gelijk aan 1 wordt. Dit nieuwe grondtal e moet dan voldoen aan de betrekking

$$C^{-1} \cdot {}^{10}\log 2 = {}^{e}\log 2, \tag{6}$$

waarin $C$ is bepaald door (5). Men vindt hieruit

$$e = 10^C.$$

Vult men de uit (6) bepaalde waarde van $C$ in (4) in, dan volgt voor $x \geqq 1$

$$^{e}\log x = \int_1^x \frac{dt}{t} \tag{7}$$

en

$$\frac{d\, {}^{e}\log x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

De geldigheid van (7) voor $0 < x < 1$ vindt men door in (7) te substitueren $x = y^{-1}$ en $t = u^{-1}$.

De effectieve bepaling van e geeft bij deze methode enige moeilijkheid omdat men niet de gebruikelijke reeks voor e vindt. Men zou hieraan kunnen tegemoetkomen door te beschouwen

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+t} = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - t + t^2 - \ldots)dt = {}^{e}\log \tfrac{3}{2},$$

waaruit — als men heenstapt over de moeilijkheden verbonden aan

termsgewijze integratie van een reeks — volgt

$$^{e}\log\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \cdots.$$

Is $S$ de som van deze reeks, dan is

$$^{e}\log\frac{3}{2} = S$$

of

$$e = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/S}.$$

Men kan dan een benadering van e geven.

Het wil mij voorkomen, dat de hiervoor gegeven methode binnen het bevattingsvermogen van de goede leerlingen valt.

## PYTHAGORAS

### EEN NIEUW WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Het zal niet nodig zijn voor de lezers van Euclides uiteen te zetten welke belangrijke rol de wiskunde speelt in de moderne maatschappij en dat het noodzakelijk is de belangstelling voor de wiskunde bij de studerende jeugd te stimuleren.

In verschillende landen wordt de jeugd geanimeerd zich met wiskundige problemen bezig te houden door middel van een tijdschrift. Zo vinden we in Frankrijk: Le Facteur X, in Engeland: The mathematical Pie en in de Verenigde Staten van Amerika: The Mathematical Student Journal. In deze tijdschriften worden artikelen gepubliceerd over moderne wiskundige onderwerpen en over de geschiedenis van de wiskunde. Verder wordt er een grote plaats ingeruimd voor puzzels en problemen.

De Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap meent, dat het ook in ons land wenselijk en mogelijk is een dergelijk tijdschrift voor jongeren uit te geven.

Het eerste nummer van dit tijdschrift, dat we Pythagoras gedoopt hebben, zal binnenkort verschijnen.

Wil dit tijdschrift kans van slagen hebben, dan zal daarvoor ook een beroep moeten worden gedaan op de medewerking der docenten. De abonnementsprijs mag nl. niet te hoog worden. Deze is voor een groot deel afhankelijk van de verzendkosten. Men kan die zo laag mogelijk houden door de abonnementen via de school te doen lopen, zodat de verzending in aantallen kan plaatsvinden.

We zijn ons ervan bewust, dat dit enig extra werk voor de wiskundedocenten meebrengt, maar hierdoor kan een plan doorgevoerd worden, waarvan in bovengenoemde landen is gebleken, dat daarvoor veel belangstelling is bij de leerlingen.

Elk nummer zal bestaan uit 16 pagina's. De druk wordt verzorgd door J.B. Wolters' uitgeversmaatschappij. Abonnementen kunnen bij haar worden opgegeven.

De abonnementsprijs bedraagt voor leerlingen, die zich via de school abonneren f 2,00, voor anderen f 3,00 per jaargang van 4 of 5 nummers.

We hopen van harte, dat de wiskundedocenten dit initiatief van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde willen steunen. Inlichtingen worden gaarne verstrekt door de beide redacteuren:

Bruno Ernst, Bosschendijk 2, Oudenbosch. Tel. 01652 - 726
G. Krooshof, Noorderbinnensingel 140 Groningen. Tel. 05900 - 32494

## RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

45. Men gooit met een munt. Men wil net zo lang gooien, totdat men een serie van zes keer kruis werpt. Men kan nu het gemiddelde aantal keren $n_1$ berekenen, dat men moet gooien om een serie *k k k k k k* te werpen.

Men kan nu ook vragen het gemiddelde aantal keren $n_2$ te berekenen, dat men moet werpen om een serie *k k m m k k* te werpen.

Hoewel de kans op beide gebeurtenissen even groot, nl. $2^{-6}$ is, is $n_1 > n_2$. Hoe is dit te verklaren?

46. A en B spelen het volgende spel. In een zak bevinden zich 1088 knikkers. A begint en neemt een aantal knikkers uit de zak; daarna neemt B een aantal knikkers, dan A weer en zo verder. Het aantal, dat A de eerste keer neemt, mag hoogstens 100 zijn; verder mogen A en B bij elke beurt niet meer nemen dan de ander bij de vorige beurt genomen heeft. Men moet steeds minstens één knikker nemen. De aantallen knikkers, die achtereenvolgens uit de zak genomen worden, vormen dus een monotoon niet toenemende rij van natuurlijke getallen. Wie de laatste knikker pakt heeft het spel gewonnen. Hoe moet A spelen om zeker te zijn van de winst?

### OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

43. Men kan $n$ hoeden uitreiken, namelijk aan de even nummers. Twee even nummers zijn immers nooit relatief priem. Zou men $n + 1$ hoeden uitreiken, dan zouden zeker twee opeenvolgende nummers aan de beurt komen, wat niet mag, omdat twee opeenvolgende getallen steeds relatief priem zijn.

44. Zie figuur, $ABCD$ is de oorspronkelijke stand, $CFED$ de nieuwe stand. Railbanen: $AC$, $BF$, $CE$ en $DG$. De beweging van de vier hoekpunten komt overeen met de banen (middellijnen van de grote cirkel) van de punten $A$, $B$, $C$ en $D$, als de kleine cirkel in de dubbel zo grote cirkel rolt.

